

**Д О К Л А Д Ы**  
**АКАДЕМИИ НАУК СССР**

---

**НОВАЯ СЕРИЯ**

**1948**

ОТТИСК ИЗ Т. LX № 7

Д. Г. МЕЙЗЛЕР, О. С. ПАРАСЮК и Е. Л. РВАЧЕВА

**МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1948)

Настоящая заметка представляет собой обобщение одного результата Б. В. Гнеденко<sup>(1)</sup> на многомерный случай.

Пусть дана последовательность взаимно независимых одинаково распределенных  $s$ -мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_s^{(n)}),$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения.

Обозначим  $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_s)$  вероятность того, что  $\xi_k^{(n)} = x_k$ ,  $k=1, 2, \dots, s$ . Будем считать, что моменты первого и второго порядка  $a_k = M\xi_k^{(n)}$ ,  $b_{ij} = M(\xi_i^{(n)}\xi_j^{(n)})$  конечны, а детерминант  $\Delta = |b_{ij}|$  отличен от нуля.

Пусть, далее,

$$\zeta^{(n)} = (\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \dots, \zeta_s^{(n)}) = \sum_{m=1}^n \xi^{(m)} = \left( \sum_{m=1}^n \xi_1^{(m)}, \sum_{m=1}^n \xi_2^{(m)}, \dots, \sum_{m=1}^n \xi_s^{(m)} \right)$$

Обозначим через  $P_n(z) = P_n(z_1, z_2, \dots, z_s)$  вероятность того, что компоненты векторной суммы  $\zeta^{(n)}$  примут значения  $\zeta_k^{(n)} = z_k$ ,  $k=1, 2, \dots, s$ .

Известно, что при некоторых довольно общих условиях вероятности  $P_n(z_1, z_2, \dots, z_s)$  допускают асимптотическое представление вида

$$P_n(z) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{s/2} \Delta^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} Q \left( \frac{z-na}{\sqrt{n}} \right)}, \quad (*)$$

где  $a$  обозначает вектор  $(a_1, a_2, \dots, a_s)$ , а

$$Q = \sum_{i,j=1}^s B_{ij} u_i u_j$$

есть квадратичная форма с коэффициентами

$$B_{ij} = \Delta_{ij} / \Delta,$$

образующими матрицу, обратную к матрице  $\|b_{ij}\|$ . Нашей задачей является указать необходимые и достаточные условия для существо-

вания указанного асимптотического представления. Более точно, мы доказываем следующее предложение:

*Теорема. Для того чтобы разности*

$$n^{\frac{s}{2}} P(z) - \frac{1}{(2\pi)^{s/2} \Delta^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} Q\left(\frac{z-na}{\sqrt{n}}\right)}$$

для всех векторов  $z$  с целочисленными координатами стремились равномерно (относительно  $z$ ) к нулю, необходимо и достаточно условие:

(S) *Общий наибольший делитель объемов  $s$ -мерных симплексов, все  $s+1$  вершин которых лежат в целочисленных точках  $x$ , для которых  $P(x) > 0$ , равен  $\frac{1}{s!}$ .*

Естественно, что в условии (S) имеются в виду невырожденные  $s$ -мерные симплексы. Условие  $|\Delta| \neq 0$  гарантирует их существование.

Условие (S) равносильно следующему:

(S') *Параллелепипедальная решетка, порождаемая всеми векторами  $x = x' - x''$ , для которых  $P(x') > 0$ ,  $P(x'') > 0$ , совпадает с решеткой всех целочисленных точек  $s$ -мерного пространства.*

Легко видеть, что при нарушении условия (S') асимптотическое представление (\*) не только не имеет силы в смысле равномерной сходимости, которая требуется в нашей теореме, но и вообще является совершенно непригодным для представления вероятностей  $P_n(z)$ .

Общий случай, впрочем, легко сводится к случаю, подчиненному нашей теореме: если условие (S') не выполнено в данной системе координат  $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ , то от нее всегда можно перейти к новой системе координат, в которой все точки  $x$  с  $P(x) > 0$  останутся целочисленными, а условие (S) уже будет выполняться.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ценные указания при ее решении.

Львовский отдел  
Института математики  
Академии Наук УССР

Поступило  
1 IV 1948

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Б. В. Гнеденко, Усп. матем. наук, в. 1 (1948).